

## MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O TRÁFEGO DE PEDESTRES USANDO A TEORIA TERMODINÂMICA E MODELOS HIDRODINÂMICOS PARA UM SISTEMA MACROSCÓPICO.

M. V. R. P. G. Ferreira, L. M. Gramani e E. Kaviski

### RESUMO

As teorias de tráfego de pedestres buscam descrever de uma maneira matemática as interações entre os pedestres e a infra-estrutura. Estas teorias são indispensáveis em todos os modelos de tráfego de pedestres e ferramentas para a análise de operações nas vias em geral. Muitos estudos têm sido dedicados para a determinação de uma lei que vincule a velocidade das caminhadas com a densidade das multidões, e consequentemente seu fluxo. Um grande número de fatores pode afetar o comportamento dos pedestres (idade, cultura, gênero, propósito da viagem, tipo de infra-estrutura, direção da caminhada). Para caracterizar este comportamento, surgiu um estudo de características do tráfego de pedestres envolvendo modelos descritos por equações diferenciais e íntegro-diferenciais, ou seja, modelos aplicáveis na área da teoria macroscópica e cinética. Neste trabalho desenvolve-se o modelo contínuo de primeira ordem para o fluxo de tráfego de pedestres tendo como ponto de partida uma equação da continuidade que é fechada para dois casos distintos: primeiramente o sistema é fechado com uma velocidade constante; em seguida a equação da continuidade é acoplada a uma velocidade linear, obtendo assim dois modelos hidrodinâmicos de primeira ordem. Os modelos foram resolvidos pelo método das diferenças finitas e depois os resultados foram comparados resolvendo-se o mesmo modelo pelo método das características e também foram feitas comparações com dados experimentais bibliográficos.

### 1 INTRODUÇÃO

O fluxo de grandes multidões de pedestres está se tornando cada vez mais importante com o crescimento das populações nas cidades. Muitos estudos de fluxo de pedestres foram empreendidos, em especial nas últimas três décadas, contudo o nosso conhecimento sobre o fluxo de multidões ainda é insuficiente e atrasado comparado a outros modos de transporte.

A literatura existente é relatada em vários artigos, entre eles: Fruin (1971), Virkler *et al.* (1994), Older (1968), Sarkar *et al.* (1997), Tanariboon *et al.* (1986), onde o foco para estes trabalhos dá-se em diferentes aspectos tais como: modelagem matemática e física, desenvolvimento de esquemas computacionais, problemas analíticos, etc.

As teorias de tráfego de pedestres buscam descrever de uma maneira matemática as interações entre os pedestres e a infra-estrutura. A infra-estrutura consiste no sistema de ruas e outras vias públicas por onde estes pedestres circulam e em todos os seus elementos operacionais, incluindo dispositivos de controle, faixas de pedestres e semáforos. Estas teorias são indispensáveis em todos os modelos de tráfego de pedestres e ferramentas para a análise de operações nas vias em geral, edifícios públicos e privados, etc.

Na década de trinta, surge na Inglaterra as primeiras tentativas de sinalização para pedestres. Desde os anos sessenta muitos estudos têm sido dedicados para a determinação de uma lei que vincule a velocidade das caminhadas com a densidade das multidões. Nos anos recentes, pesquisas foram dirigidas para o estudo de padrões de fluxo de multidões sob situações de emergência (Kerner, 2004), e uma crescente atenção foi dedicada aos efeitos do comportamento das multidões na dinâmica de estruturas no campo do engenheiro civil (Daamen, 2004). Um grande número de fatores pode afetar o comportamento dos pedestres (idade, cultura, gênero, propósito da viagem, tipo de infra-estrutura, direção da caminhada). Desta forma, as propriedades dos pedestres diferem de caso para caso, conseqüentemente suas características específicas não podem ser consideradas constantes no sistema. Para caracterizar este comportamento, surgiu um estudo de características do tráfego de pedestres envolvendo modelos descritos por equações diferenciais, ou seja, modelos aplicáveis na área da teoria macroscópica.

A descrição macroscópica descarta a vista microscópica do tráfego em termos das velocidades individuais dos pedestres ou as componentes individuais do sistema (tais como as ligações ou os cruzamentos), adotando uma visão macroscópica do tráfego de pedestres em uma rede. Nesta descrição o estado do sistema é descrito por quantidades médias localmente calculadas, isto é, a densidade, a velocidade e o fluxo dos indivíduos, considerados como variáveis dependentes do tempo e do espaço. Os modelos matemáticos descrevem a evolução destas variáveis, por sistemas de equações diferenciais parciais.

O Método das Diferenças Finitas (MDF) consiste em substituir as derivadas na equação por aproximações numéricas de mesma ordem de aproximação, utilizando a série de Taylor. A Equação de diferenças finitas é escrita para cada ponto da região discretizada em que se deseja calcular a solução do problema.

O Método das Características permite transformar um sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias, válidas ao longo de curvas no plano  $(x, t)$ , curvas estas ditas características. As equações são, então, integradas simultaneamente ao longo das características correspondentes, a partir de valores conhecidos, definidos pelas condições iniciais e de contorno.

O objetivo deste trabalho é resolver um modelo contínuo de primeira ordem para o fluxo de tráfego de pedestres tendo como ponto de partida a equação da continuidade que é fechada para dois casos distintos: primeiramente o sistema é fechado com uma velocidade constante (modelo proposto por Ferreira, Gramani e Kaviski e chamado de modelo FGK); em seguida a equação da continuidade é acoplada a uma velocidade linear, obtendo assim dois modelos hidrodinâmicos de primeira ordem. Os modelos foram resolvidos pelo método das diferenças finitas e depois os resultados foram comparados resolvendo-se os mesmos modelos pelo método das características. Outros modelos que relacionam a densidade e a velocidade, estudados por diversos autores, serão compara-

dos para validar este trabalho.

A análise destes modelos fornece meios para avaliar o tráfego de pedestres e determinar estratégias de controle em áreas urbanas.

## 2 EQUAÇÃO MACROSCÓPICA PARA O TRÁFEGO DE PEDESTRES UNIDIMENSIONAL

Sabe-se que os modelos hidrodinâmicos macroscópicos são descritos por três modelos de equações de conservação que correspondem a massa, momento e energia. Os modelos hidrodinâmicos de primeira ordem utilizam a equação da conservação da massa, ou seja, a conservação do número de pedestres na estrutura. Esta equação diferencial, com duas variáveis, a densidade e a velocidade dos pedestres como função do tempo e do espaço, é fechada com uma relação matemática fenomenológica adicional. Das diferentes escolhas desta relação, obtêm-se diferentes modelos macroscópicos de primeira ordem. Um ponto chave destes modelos de primeira ordem é a grande vantagem de sua simplicidade, o que torna o modelo computacionalmente muito interessante. Dois modelos serão resolvidos neste trabalho. O primeiro considera como relação fenomenológica uma velocidade constante para os pedestres e o segundo considera uma relação linear para a velocidade em relação a densidade.

A densidade, representada por  $\rho(x, t)$ , a velocidade,  $u(x, t)$  e o fluxo,  $q(x, t)$ , são as variáveis fundamentais do fluxo de tráfego unidimensional de pedestres, dependentes da posição  $x$  e do tempo  $t$  em algum momento e estão relacionadas através de:

$$q = \rho u, \quad (1)$$

onde  $q = q(\rho)$ ,  $u = u(\rho)$  e  $\rho = \rho(x, t)$ .

A equação (1) é denominada *equação fundamental do fluxo de tráfego de pedestres* e sua representação gráfica é conhecida como o diagrama fundamental do fluxo de tráfego. Para este trabalho, esta é uma das relações que adota-se para construir o modelo macroscópico para o tráfego de pedestres.

A equação da continuidade, que descreve a conservação de massa, é de fundamental importância para o estudo de todos os problemas relacionados ao movimento dos fluidos e a sua dedução pode ser feita por diferentes desenvolvimentos teóricos, como por exemplo por Sisson e Pitts (1988) dentre outros.

Assim, tem-se a equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Contudo, neste artigo será analisada uma possível entrada de fluxo, ou seja, uma entrada de pedestres durante o processo de caminhada. Portanto a equação (2) transforma-se em:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = g(t), \quad (3)$$

onde  $g(t)$  é uma função que representa a entrada de pedestres no sistema considerado e que o fluxo  $q$  está relacionado com a velocidade  $u$  pela relação (1).

Essa equação expressa o seguinte princípio físico: consideremos uma quantidade de pedestres em uma via, num determinado período de tempo. A equação da continuidade diz que o número de pedestres que entra no ambiente de caminhada tem que ser igual ao número de pedestres que sai deste ambiente.

Existem diversos modelos conhecidos na literatura que fornecem a relação entre a velocidade e a densidade, como: o modelo linear de Greenshields (1935), o modelo logaritmo de Greenberg (1959), o modelo exponencial de Underwood (1961), dentre outros. Seguindo essas idéias, fornecendo a velocidade como função da densidade, faz-se o fechamento para os dois modelos hidrodinâmicos deste trabalho.

Para tal, primeiramente considera-se uma velocidade constante para os pedestres durante a caminhada e em seguida analisa-se uma velocidade linear em relação a densidade, onde seus respectivos fluxos são:

- para  $u = u_0$  tem-se  $q = u_0\rho$ , onde  $u_0$  é a velocidade média dos pedestres.
- para  $u = a + b\rho$  tem-se  $q = a\rho + b\rho^2$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes, com  $a > 0$  e  $b < 0$ .

## 2.1 Modelo FGK - Modelo Hidrodinâmico de 1ª ordem para uma velocidade constante

Tem-se para uma velocidade média constante  $u_0$  o seguinte modelo hidrodinâmico:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} & = g_1(t), \\ u & = u_0, \text{ para } 0 \leq \rho < \rho_j \\ \rho(0, t) = \rho(x, 0) & = 0 \end{cases} \quad (4)$$

onde  $\rho_j = 2\rho_{crit}$  é a densidade máxima para a estrutura, e  $u_0$  é a velocidade média dos pedestres durante a caminhada. As condições de contorno serão determinadas na seção seguinte, de acordo com o ambiente de caminhada analisado.

Assim pode-se escrever:

$$q = u_0^+ \rho \quad \text{se } 0 \leq \rho \leq \rho_{crit} \quad (5a)$$

$$q = u_0^- \rho + \beta \quad \text{se } \rho_{crit} \leq \rho \leq \rho_j. \quad (5b)$$

onde  $u_0 = u_0^+$ ,  $u_0^- = -u_0^+$  e  $\beta = 2\rho_{crit}$ . Essa idéia é assumida pois, para que seja possível fazer uma comparação ao que ocorre fisicamente, precisa-se dizer que existe uma densidade máxima  $\rho_j$ , e uma densidade crítica  $\rho_{crit}$  que sinaliza um decaimento no fluxo de pedestres devido ao aumento da densidade.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(u_0^+ \rho)}{\partial x} = g_1(t) \quad (6a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(u_0^- \rho + \beta)}{\partial x} = g_1(t). \quad (6b)$$

As equações (6a) e (6b) serão resolvidas por aproximações de diferenças finitas e pelo método das características.

## 2.2 Modelo Hidrodinâmico de 1ª ordem para uma velocidade linear

A equação também será resolvida para uma velocidade linear, assumindo  $u = a + b\rho$ . Assim,

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = g_2(t), \\ u = a + b\rho, \text{ para } 0 \leq \rho \leq \rho_j \\ \rho(0, t) = \rho(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

onde  $a = u_f$  e  $b = -\frac{u_f}{\rho_j}$  e com as mesmas condições de contorno do modelo anterior.

Portanto tem-se um fluxo

$$q = a\rho + b\rho^2. \quad (8)$$

Por conseguinte, tem-se uma equação diferencial parcial hiperbólica quando trabalha-se com uma velocidade linear

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(a\rho + b\rho^2)}{\partial x} = g_2(t), \quad (9)$$

sendo  $g_2(t)$  uma constante conhecida, determinada dependendo da situação que se deseja calcular.

## 3 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

A solução do modelo matemático é obtida por meio de simulação computacional realizada no espaço e no tempo de domínio. Levando-se em conta as considerações já feitas, resolve-se o seguinte exemplo prático:

Considera-se uma pista de comprimento  $L$  metros, por  $D$  metro de largura, como mostrado na figura (1).

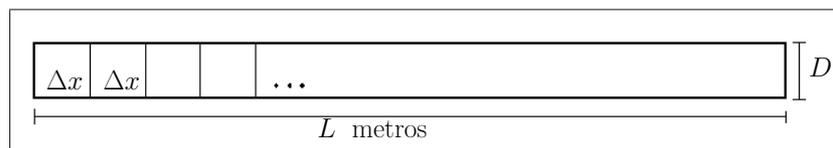


Figure 1: Ambiente da caminhada dos pedestres

O modelo computacional é gerado para um tempo total de  $tt$  minutos. Para  $t = 0$  e  $x = 0$  não há pedestres no sistema, ou seja, a condição inicial é  $\rho(0, t) = 0$  e  $\rho(x, 0) = 0$ .

Numa primeira análise tem-se que, a partir do instante inicial, os pedestres começam a entrar pelas laterais desta pista em todos os pontos (para todo  $x$  até  $x = L$ ), durante

um período de  $t_\kappa$  minutos, com uma média de 1 pedestre a cada  $t_\varphi$  minutos, com  $t_\varphi < t_\kappa < tt$ , ou seja,  $g(t) = n$  (especificado no modelo FGK e no modelo de velocidade linear como  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$ , respectivamente), onde  $n$  é uma constante e  $n = \frac{1}{t_\varphi 60}$  (ped/s). No tempo restante não entra ninguém, apenas analisa-se o comportamento do fluxo já existente que segue até todos os pedestres chegarem a posição final.

Admite-se que a condição de Courant (Castanharo, 2003)  $\lambda = 0, 1$ , o que nos dá  $\Delta t = 0, 1 \Delta x$ .

Valores para velocidade máxima admitida no ambiente de caminhada, velocidade média e densidade máxima por metro quadrado, foram retirados do artigo de Older (1968).

Com esses dados pode-se explicar como ficam os dois modelos hidrodinâmicos, fechados respectivamente por uma equação que refere-se a uma velocidade constante e por uma equação que representa uma velocidade linear.

### 3.1 Diferenças finitas para o modelo FGK

Assumindo um modelo com velocidade constante e expressando o fluxo como:

$$q = \begin{cases} u_0^+ \rho & \text{para } 0 \leq \rho \leq \rho_{crit}, \\ u_0^- \rho + \beta & \text{para } \rho_{crit} \leq \rho \leq \rho_j, \end{cases} \quad (10)$$

as equações (6a) e (6b) são reescritas como:

$$\begin{cases} r(\lambda u_0^+ + 1) - \Omega = 0 & \text{para } 0 \leq \rho \leq \rho_{crit}, \\ r(\lambda u_0^- + 1) + \lambda \beta - \Omega = 0 & \text{para } \rho_{crit} \leq \rho \leq \rho_j, \end{cases} \quad (11)$$

onde  $\Omega = \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_i^{k+1}) + \rho_{i+1}^k + \frac{\Delta t}{2} (g_{i+1}^{k+1} + g_i^{k+1})$  e  $r = \rho_{i+1}^{k+1}$ .

### 3.2 Diferenças finitas para uma velocidade linear

Assumindo o modelo linear para a velocidade e expressando o fluxo como

$$q = a\rho + b\rho^2, \quad (12)$$

a equação (9) é reescrita como:

$$b\lambda r^2 + (a\lambda + 1)r - \Omega = 0. \quad (13)$$

onde  $\rho_{i+1}^{k+1} = r$ .

Com isso pode-se obter resultados computacionais para o fluxo de tráfego de pedestres admitindo primeiramente uma velocidade constante e posteriormente uma velocidade linear.

### 3.3 Método das características para o modelo FGK

Admitindo uma velocidade média constante  $u_0$ , espera-se encontrar um fluxo de pedestres que segue a modelagem apresentada na figura (2):

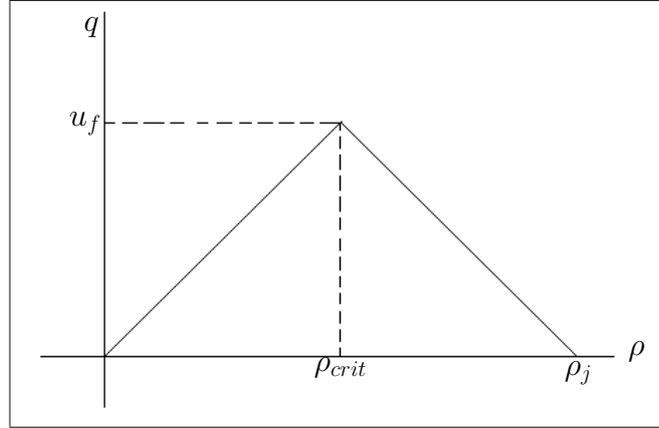


Figure 2: Diagrama Fundamental para uma velocidade constante.

Trabalhando com a equação (6a), onde  $\frac{\partial(u_0^+ \rho)}{\partial x}$ , encontra-se:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{dt} dt = \int_{t_0}^t u_0 dt \qquad \int \frac{d\rho}{dt} dt = \int g(t) dt$$

$$(x - x_0) = u_0(t - t_0) \qquad \rho(t) = g(t)t + \rho_0$$

onde  $\rho_0$  é uma constante de integração conhecida.

O mesmo processo se dá para a equação (6b), onde  $\frac{\partial(u_0^- \rho + \beta)}{\partial x}$ , para  $\beta = 2\rho_{crit}$ , assim obtêm-se

$$(x - x_0) = -u_0(t - t_0) \tag{14}$$

$$\rho(t) = g(t)t + \rho_0 \tag{15}$$

### 3.4 Método das características para uma velocidade linear

Adotando-se a relação linear  $u = a + b\rho$  para o fluxo  $q = a\rho + b\rho^2$ , obtêm-se a equação (9).

Desenvolvendo  $\frac{\partial q}{\partial x}$ , tem-se

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{dq}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = a + 2b\rho \frac{\partial \rho}{\partial x}. \tag{16}$$

Combinando a equação da continuidade modificada

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = g(t) \tag{17}$$

com a equação (16), obtêm-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (a + 2b\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = g(t). \quad (18)$$

Escrevendo

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt. \quad (19)$$

e combinando as equações (18) e (19) é possível eliminar o termo  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  presente em ambas, e rearranjando os termos, obtêm-se

$$g(t) - \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \left( a + 2b\rho - \frac{dx}{dt} \right). \quad (20)$$

Se o valor de  $\rho$  for especificado ao longo da curva  $C$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$  pode ser determinado ao longo dessa característica pela equação (20). Sabe-se que os valores das primeiras derivadas de  $\rho$  ao longo das características podem ser indeterminados. Desta maneira, para que  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$  seja indeterminado ao longo de  $C$ , deve-se ter

$$\left( a + 2b\rho - \frac{dx}{dt} \right) = 0, \quad (21)$$

o que define a equação da curva característica  $C$ , como:

$$\frac{dx}{dt} = a + 2b\rho. \quad (22)$$

Combinando a condição expressa por (21) com a equação (20), obtêm-se  $g(t) - \frac{d\rho}{dt} = 0$ , assim,

$$g(t) = \frac{d\rho}{dt}. \quad (23)$$

Na verdade, existem infinitas curvas características no plano  $x - t$ , todas com equação da forma (22), dependendo dos valores das constantes  $a$  e  $b$ .

Integrando-se diretamente a equação (23), obtêm-se

$$\int \frac{d\rho}{dt} dt = \int g(t) dt \Rightarrow \rho(t) = g(t)t + \rho_0, \quad (24)$$

Substituindo a equação (24) na equação (22) e integrando-a diretamente, obtêm-se a equação analítica da curva característica. Assim tem-se:

$$x - x_0 = a(t - t_0) + bg(t)(t - t_0)^2 + 2b\rho_0(t - t_0), \quad (25)$$

sendo  $x_0$  o ponto de partida da curva característica para  $t = 0$ .

Nos casos em que mais de uma característica passa por um mesmo ponto  $(x, t)$ , neste ponto a solução apresenta uma descontinuidade e há a formação de um *choque*.

## 4 RESULTADOS

A pista analisada computacionalmente tem 600 metros de comprimento por 1 metro de largura.

O modelo é gerado para um tempo total de  $t = 10000$  segundos. Para  $t = 0$  e  $x = 0$  não há pedestres no sistema, ou seja  $\rho(0, t) = 0$  e  $\rho(x, 0) = 0$ .

Tem-se, a partir do instante inicial, que os pedestres começam a entrar pelas laterais desta pista em todos os pontos (para todo  $x$  até  $x = 600$ ), durante um período de 30 minutos, com uma média de 1 pedestre a cada 7,109 minutos, para uma velocidade constante, e de 1 pedestre a cada 4,6875 minutos, para uma velocidade linear. Depois dos 30 primeiros minutos até o minuto final de análise ( $t = 10000$  segundos), não há mais entrada de pedestres, apenas analisa-se o comportamento do fluxo já existente, que segue até todos os pedestres chegarem a posição final.

A condição de Courant  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  admitida para este modelo vale  $\lambda = 0,1$ , contudo poderia ser trabalhado com valores bem maiores, caso fosse desejado que os resultados computacionais fossem obtidos mais rapidamente. É necessário ressaltar que  $\lambda < 1$ .

Salienta-se que os dados utilizados para gerar o modelo computacional são baseados nos experimentos realizados e publicados por Older em 1968, onde se assume que a velocidade de fluxo livre  $u_f = 1,4 \text{ m/s}$ , a velocidade média  $u_0 = 0,7 \text{ m/s}$  e a densidade máxima  $\rho_j = 4 \text{ ped/m}^2$ .

Quando a densidade atinge o seu valor máximo  $4 \text{ ped/m}^2$  e o fluxo torna-se zero, esse fluxo de pedestres começa a retornar, ou seja, caminhar no sentido oposto ao determinado para a pista, isso faz com que se tenha um confronto com a condição inicial  $\rho(0, 0) = 0$ . Assim, foi considerado que a densidade máxima nunca atingiria 4 pedestres por metro quadrado (o programa foi compilado assumindo um valor máximo de  $3,7 \text{ ped/m}^2$ ), assim o fluxo também nunca atingiria seu valor nulo, o que possibilita que a caminhada dos pedestres continue ocorrendo, até que passe os 30 minutos iniciais e não entre mais ninguém, podendo a pista esvaziar.

Os resultados podem ser analisados nas figuras abaixo, onde é possível comparar os resultados obtidos pelo método das diferenças finitas implícito, o método das diferenças finitas explícito (Castanharo, 2003) (também geramos um código para resolver as equações diferenciais por este método) e os resultados obtidos pelo método das características.

As figuras menores inseridas no canto direito superior das figuras ((3), (4)) foram retiradas do artigo de Daamen (2004) e são gráficos comparativos para validação dos resultados gerados pelos nossos códigos.

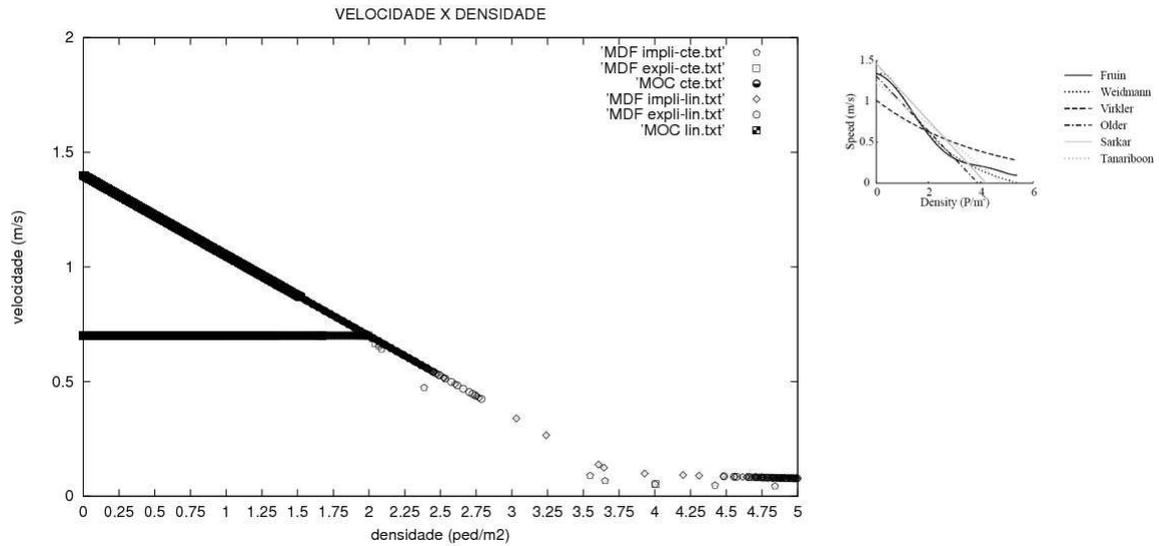


Figure 3: Velocidade pela Densidade - Comparativo para modelo FGK e velocidade linear

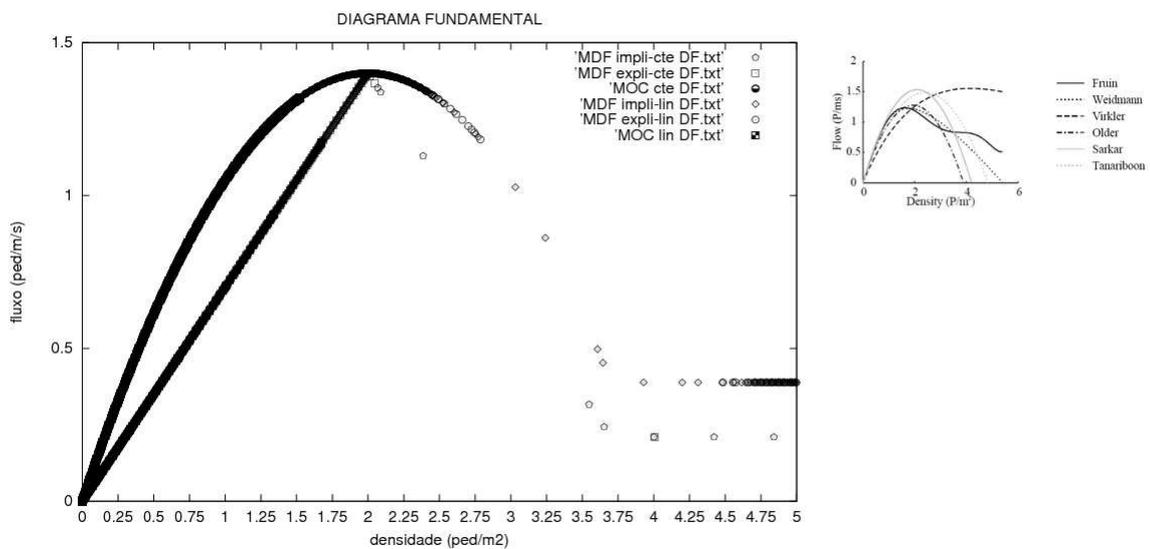


Figure 4: Diagrama Fundamental - Comparativo para modelo FGK e velocidade linear

Daamen reuniu alguns diagramas fundamentais obtidos na bibliografia que foram gerados de forma experimental ou fazendo-se relações entre a velocidade e a densidade dos pedestres.

Observa-se que todos os gráficos referentes ao modelo FGK que relacionam a velocidade com a densidade são semelhantes, assim como os diagramas fundamentais. O mesmo se dá quando trabalha-se com uma velocidade linear. Também nota-se que os gráficos se assemelham com os encontrados na bibliografia.

Os resultados obtidos com o programa criado para solucionar o modelo numérico pelo método das características, não coincidem com os resultados obtidos pelo método das

diferenças finitas. Quando utiliza-se o método das características para resolver os modelos hidrodinâmicos que compõem este trabalho (modelos hidrodinâmicos compostos pela equação da conservação da massa e acoplados com uma equação fenomenológica do tráfego de pedestres) é feita uma linearização na equação da conservação de massa. A partir deste ponto, ou seja, quando é feita esta linearização, a equação da continuidade sai de sua forma conservativa. Quando o método das características é aplicado na equação linearizada podem surgir problemas com a conservação de massa (Fabiani, 1995). No caso deste trabalho, observa-se que ao fazer a linearização, deixa-se de ter a garantia de ocorrer conservação de massa e isso é verificado com os resultados gerados pelo código computacional.

## 5 CONCLUSÕES

Foi trabalhado neste artigo com um modelo de primeira ordem, que foi constituído pela equação da continuidade e fechado com dois tipos de equações que relacionam a velocidade e a densidade dos pedestres (velocidade constante e velocidade linear). Os dois modelos foram resolvidos numericamente por aproximações por diferenças finitas (MDF) e pelo método das características (MOC).

Na solução de problemas de mecânica dos fluidos existem MDF muito testados, que solucionam uma grande variedade de problemas, com amplas vantagens sobre os outros métodos. Li (1974) afirma e prova que o método das diferenças finitas é consistente, convergente e incondicionalmente estável. Através de testes numéricos realizados por ele, verificaram-se que os máximos erros relativos que podem ocorrer nos valores dos fluxos máximos estimados, são sempre menores do que 0.5% (testes realizados para  $0.02 (m/s) \leq dt/dx \leq 2 (m/s)$ ).

O ponto chave dos modelos hidrodinâmicos de primeira ordem é a sua simplicidade e rapidez computacional.

Os modelos resolvidos por aproximações por diferenças finitas obtiveram ótimas respostas: os resultados por MDF implícito ou por MDF explícito são semelhantes e podem ser tranquilamente comparados e validados com os modelos de Fruin, Older, Virkler e tantos outros.

Contudo, os resultados obtidos com o método das características foram muito diferentes dos resultados encontrados na bibliografia e os resultados obtidos com o MDF, pois observou-se que não estava ocorrendo conservação de massa. O MOC só pode ser aplicado para solucionar a equação da conservação de massa se ela for linearizada. Quando é feita esta linearização, a equação da continuidade sai de sua forma conservativa. Quando o método das características é aplicado na equação linearizada podem surgir problemas com a conservação de massa, que é exatamente o que está ocorrendo neste caso e que pode ser visto em trabalhos como de Fabiani (1995).

Foi possível fazer contribuições para as pesquisas de tráfego, pois os modelos analisados modelaram satisfatoriamente sem a necessidade de grandes gastos experimentais e utilizando-se de baixo tempo de processamento computacional.

## References

- Castanharo, G. (2003) **Aplicação de Modelos Hidrodinâmicos no Contexto de Previsão de Afluências a Reservatórios**, Dissertação de Mestrado, Setor de Tecnologia UFPR.
- Daamen, W. (2004) **Modelling Passenger Flows In Public Transport Facilities**, Delft University of technology, Department transport and planning.
- Fabiani, A. T. (1995) **Contribuição ao Estudo das Ondas Geradas pela Ruptura de Barragens**, Dissertação de Mestrado, Setor de Tecnologia UFPR.
- Fruin, J. J. (1971) Design for Pedestrians: A Level-of-Service Concept **Highway Research Record**, 355, 1-15.
- Greenberg, H. (1959) An Analysis of Traffic Flow. **Operations Research**,7(1), 79-85.
- Greenshield, B.D. (1934) A Study in Highway Capacity. **Transportation Research Board**, 14(1), 448-477.
- Kerner B. (2004) **The Physics of Traffic: Empirical freeway pattern features, Engineering applications and theory**, Springer, Berlin.
- Li, R. M. (1974) **Mathematical Modelling of Response from Small Watershed**, Tese de doutorado. Colorado State University, Fort Collins, Colorado, USA.
- Older, S.J. (1968) Movement of Pedestrians on Footways in Shopping Streets. **Traffic Engineering and Control**, 10(4), 160-163.
- Sarkar, A.K. and Janardhan K.S.V.S. (1997) A Study on Pedestrian Flow Characteristics, in Cdrom with Proceedings, **Transportation Research Board**, Washington.
- Sissom, L. E.; Pitts, D. R. (1988) **Fenômenos de Transporte**, Editora Guanabara.
- Tanaboriboon, Y., Hwa S.S., Chor, C.H. (1986) Pedestrian Characteristics study in Singapore, **Journal of Transportation Engineering**, ASCE, 112(3), 229-235.
- Underwood, R. T. (1961) Speed, Volume, and Density Relationships. Quality and Theory of Traffic Flow. **Yale Bureau of Highway Traffic**, 141-188.
- Virkler, M. R.; Elayadath, S. (1994) Pedestrian Speed-Flow-Density Relationships, **Transportation Research Record**, 1438, 51-58.