

## ESTIMAÇÃO DE UMA MATRIZ O-D COM O USO DE MODELOS ECONOMÉTRICOS E CONTAGENS DE TRÁFEGO

**K. C. Loureiro, M. B. Gonçalves e F. M. Loureiro**

### RESUMO

Neste trabalho propõe-se um modelo econométrico para estimar uma matriz O-D de veículos leves em redes interurbanas, usando contagens volumétricas e alocação proporcional. A principal motivação para o desenvolvimento deste está na necessidade de se obter matrizes O-D de viagens de forma rápida e econômica.

Com a existência de aproximações teóricas para a construção de matrizes O-D a partir de informação facilmente disponível, como por exemplo, os volumes de tráfego em redes de transportes, utilizou-se um modelo econométrico.

Para verificação do modelo proposto foram realizados testes experimentais, em uma rede interurbana, localizada em parte da região oeste do Estado de Santa Catarina, Sul do Brasil. Utilizou-se 91 municípios e 50 postos de contagens volumétricas. Os resultados obtidos pelo modelo econométrico mostraram-se próximos dos observados. A matriz estimada através do modelo será utilizada como a matriz a priori pelo software SATURN, que usa o princípio da maximização da entropia.

### 1 INTRODUÇÃO

Uma das etapas de grande importância nas análises e estudos de planejamento e operação do sistema viário é a determinação da quantidade de deslocamentos realizados entre uma cidade ou região, em decorrência da necessidade de se realizar atividades por motivo de trabalho, de estudo ou de lazer. Tradicionalmente, o número de viagens entre diferentes locais é representado por uma Matriz O-D, em que cada elemento representa o número de viagens entre uma origem e um destino específico.

A estimação de uma matriz O-D pode ser feita de várias maneiras. Pode ser realizada utilizando-se modelos tradicionais como entrevista domiciliares e em rodovias. Esses modelos são considerados, geralmente, eficazes. Porém, segundo Ortúzar e Willumsen (2001) os modelos tradicionais apresentam uma série de problemas, pois, frequentemente, requerem uma quantidade considerável de tempo, de recursos humanos e financeiros para sua realização.

Diante deste contexto, diversos estudos vêm sendo desenvolvidos com o intuito de obter metodologias alternativas com baixo custo em termos de mão de obra extensiva e de tempo

dos entrevistados na estimação de matrizes O-D. Pode-se destacar os modelos baseados em contagens volumétricas.

Segundo Ortúzar e Willumsen (2001) existem vários modelos para a estimação de uma matriz O-D. Abrahamsson (1998) diz que alguns desses modelos se baseiam em conceitos de modelagem do tráfego e outros utilizam técnicas de inferência estatística. Na primeira categoria, que será tratada neste artigo, estão às formulações que combinam modelos de demanda de viagens (Robillard, 1975) e as que incluem princípios de maximização da entropia (Willumsen, 1978). Segundo Abrahamsson (1998), nessas formulações assume-se que o comportamento do deslocamento pode ser representado, direta ou indiretamente, por algum modelo de distribuição de viagem.

O presente trabalho tem por objetivo mostrar o potencial de utilização de modelos econométricos para a estimação de uma matriz O-D a partir de contagens volumétricas. É apresentado um estudo de caso, efetuado em uma rede interurbana localizada no oeste do Estado de Santa Catarina, Brasil. A matriz estimada através do modelo econométrico foi utilizada como a matriz a priori no software SATURN, que usa o princípio da maximização da entropia.

Utilizou-se o SATURN para se estimar uma matriz O-D, usando uma matriz unitária. Comparou-se esta com a melhor matriz estimada pelo modelo acima citado. Em seguida, usou-se a matriz estimada, pelo modelo econométrico, como matriz a priori no SATURN. Por último, foi realizada uma análise comparativa entre os resultados obtidos pelo modelo proposto, pelo SATURN com uma matriz a priori unitária e com a matriz a priori estimada. Pode-se chegar a conclusão que quando não se obtém uma matriz a priori, a matriz estimada pelo modelo proposto pode ser usada.

Este artigo está dividido em 8 seções, incluindo esta introdução. Na seção 2 são apresentados os fundamentos básicos sobre o método proposto bem como a sua formulação matemática. Também estão descritos nesta seção os principais modelos de alocação de tráfego e os diferentes métodos para estimar uma matriz O-D a partir de contagens volumétricas. Na seção 3 está a especificação do modelo econométrico, utilizado para a estimação de uma matriz O-D. Na quarta seções o software SATURN usado para estimar uma matriz O-D. A quinta seção mostra as estatísticas utilizadas para a análise do ajuste dos modelos e na sexta seção está o procedimento de calibração usado para a determinação dos parâmetros do modelo econométrico. A seção 7 mostra o teste realizado em uma área de estudo, bem como a análise e a comparação dos resultados usando-se o software SATURN. Por último, na seção 8, estão as considerações finais.

## **2 ESTIMATIVA DE MATRIZES O-D A PARTIR DE CONTAGENS VOLUMÉTRICAS**

O processo para estimar uma matriz O-D em função das contagens volumétricas consiste, basicamente, na resolução de um sistema de equações que envolvem dados referentes aos fluxos observados e ao percentual de utilização dos links da rede viária por parte da demanda.

Segundo Brenninger-Göthe et al. (1988) e Willumsen (1981) para estimar uma matriz O-D, de ordem  $N$  e com contagens de tráfego em  $K$  links, usam-se as equações fundamentais expressas por:

$$Vl_k = \sum_{i,j=1}^N p_{ij}^k T_{ij} \quad (1)$$

Onde:

$Vl_k$  é o fluxo observado no *link*  $l_k$ ;

$T_{ij}$  é o número de viagens entre  $i$  e  $j$ ;

$p_{ij}^k$  é a proporção de viagens entre  $i$  e  $j$  que usam o *link*  $l_k$ .

$k = 1, 2, \dots, K$

É importante observar, que existe a possibilidade de múltiplas soluções para a matriz O-D, pois no problema de estimação é necessário resolver o sistema de equações que relacionam fluxos e viagens. Percebe-se que o número de incógnitas é, em geral, maior que o número de equações, ou seja, geralmente, o número de pares O-D é consideravelmente maior do que o número de *links* onde a contagem de tráfego é realizada.

Portanto, pode-se dizer que existem várias matrizes que satisfazem as equações fundamentais. A questão é encontrar uma solução que seja a mais provável ou a melhor de acordo com algum critério de escolha. Por isso, alguns modelos matemáticos, ao longo dos anos, têm sido desenvolvidos e aperfeiçoados, com o intuito de melhorar no que se refere à precisão das estimativas de viagens.

Para facilitar o estudo, em geral, pode-se dizer que os diferentes métodos, encontrados na literatura, para estimar matrizes O-D, a partir de volumes de tráfego observados são definidos especificando-se os seguintes elementos: um modelo de alocação e um método de estimação.

## 2.1 Modelo de Alocação

Uma decisão fundamental ligada aos diversos tipos de alocação de tráfego é a identificação de um critério usado na seleção de um caminho dentre os diversos disponíveis. Dependendo do tratamento de congestionamento exógeno ou endógeno a determinação da alocação da matriz pode ser postulada como: alocação proporcional ou alocação de equilíbrio.

No modelo de alocação de equilíbrio os efeitos de congestionamento são mais importantes do que as diferentes percepções de custo. Este tipo de alocação é considerado realista para muitas situações, especialmente em áreas urbanas. Segundo Wardrop (1952), apud Abrahamsson (1998), o sistema de tráfego está em “equilíbrio” quando nenhum usuário consegue encontrar uma rota de menor custo do que aquela já escolhida.

Já o modelo de alocação proporcional assume independência entre os volumes de tráfego e as proporções de tráfego  $p_{ij}^k$ . Os volumes nos links ( $Vl_k$ ) são proporcionais aos fluxos O-D ( $T_{ij}$ ), onde  $i$  e  $j$  são as zonas de origem e destino, respectivamente, e  $k$  representa um link entre  $i$  e  $j$ . A proporção de usuários que escolhe uma dada rota não depende do nível de congestionamento na rede, e sim das características da rede e dos próprios usuários. Os valores das proporções  $p_{ij}^k$  podem ser determinados antes da estimação da matriz O-D e considerados, assim, dados exógenos.

Neste trabalho, como a rede analisada é esparsa, o procedimento a ser utilizado será a alocação tudo ou nada. Neste procedimento, os valores das proporções de viagens entre  $i$  e  $j$  que usam o link  $l_k$ , são denotados por  $p_{ij}^k$ , onde:

$$p_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se } l_k \text{ faz parte do caminho de custo mínimo entre } i \text{ e } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

## 2.2 Métodos de Estimação de uma Matriz O-D

**Modelo Gravitacional:** parte da suposição de que os padrões de interação espacial são regidos por leis análogas à Lei da Gravidade formulada por Newton, em 1686. Em analogia a essa lei, pode-se dizer que os fluxos de transporte entre dois pontos são diretamente proporcionais às forças atrativas, como por exemplo, população e inversamente proporcionais a um fator relacionado à separação espacial entre os pontos, geralmente chamados de fator de impedância, como por exemplo, a distância (Lima, 2001).

Ortúzar e Willumsen (2001) representam o modelo gravitacional da seguinte forma:

$$T_{ij} = \alpha O_i D_j f(c_{ij}) \quad (2)$$

Onde:

$T_{ij}$  é o número de viagens de  $i$  para  $j$ ;

$O_i$  é o número de viagens originadas na zona  $i$ ;

$D_j$  é o número de viagens destinadas à zona  $j$ ;

$\alpha$  é um parâmetro a ser calibrado;

$f(c_{ij})$  é uma função generalizada do custo de viagem com um ou mais parâmetros a serem calibrados.

Para Willumsen (1981), se um conjunto de observações de contagens volumétricas  $\{\hat{V}l_k\}$  é realizado, valores ótimos de  $b$  e  $d$  podem ser encontrados minimizando a soma dos quadrados das diferenças entre  $\{\hat{V}l_k\}$  e o correspondente valor estimado  $\{Vl_k\}$ , obtido usando-se a Equação 2. Tal método é denominado de mínimos quadrados não-linear.

$$\min \sum (\hat{V}l_k - Vl_k)^2 \quad (3)$$

Tem-se também o método dos mínimos quadrados não-linear ponderado dado por Tamin e Willumsen (1989).

$$\min \sum \frac{(\hat{V}l_k - Vl_k)^2}{\hat{V}l_k} \quad (4)$$

**Maximização da Entropia:** foi introduzida na área de transporte por Wilson (1970), sendo incorporada no processo de estimação de uma matriz O-D no contexto das contagens volumétricas por Willumsen (1978).

Suponha que o número total de viagens O-D seja igual a  $T$  e o número de viagens da origem  $i$  para o destino  $j$  seja igual a  $T_{ij}$ . Então, o número de modos (definido como

entropia) em que  $T$  viagens podem ser divididas no grupo de  $T_{ij}$  viagens (sem repetição) pode ser encontrada usando-se a equação, sujeita as restrições:

$$\begin{aligned} \max S(T_{ij}) &= \frac{T!}{\prod_{ij} T_{ij}!} \\ \text{s.a } Vl_k &= \sum_{ij} T_{ij} p_{ij}^k \\ T_{ij} &\geq 0 \\ T &= \sum_{ij} T_{ij} \end{aligned} \quad (5)$$

Onde:

$S$  é a entropia;

$T$  é o total de viagens na matriz;

$T_{ij}$  é o número de viagens de  $i$  para  $j$  estimada;

$Vl_k$  é o volume observado (coletado) no *link*  $l_k$ ;

$p_{ij}^k$  é a proporção das viagens de  $i$  para  $j$  que utiliza o *link*  $l_k$ .

De acordo com Willumsen (1978) os valores de  $T_{ij}$  que maximizam a equação, representam a solução mais provável, ou seja, com maior probabilidade de ocorrer.

Van Zuylen e Willumsen (1980) deram continuidade ao trabalho de Willumsen (1978) fazendo algumas modificações. Mais tarde Willumsen (1984) apresentou de forma detalhada essas modificações. Ele realça que a diferença da formulação inicial proposta com a atual está na incorporação de informações de uma matriz O-D existente, denominada matriz semente. O objetivo da utilização de uma matriz semente é melhorar o processo de estimação da matriz O-D, incorporando informações do padrão de deslocamento realizado.

Nesta formulação, a equação (5) é substituída pela equação (9):

$$\text{Max } S(T_{ij}) = \frac{T!}{\prod_{ij} T_{ij}!} \prod_{ij} \left( \frac{t_{ij}}{\sum_{ij} t_{ij}} \right)^{T_{ij}} \quad (6)$$

onde,

$t_{ij}$  é a quantidade de viagens de  $i$  para  $j$  de uma matriz O-D semente.

### 3 ESPECIFICAÇÃO DO MODELO ECONOMÉTRICO PARA A ESTIMAÇÃO DE UMA MATRIZ O-D

Para a estimação de uma matriz O-D a partir de contagens volumétricas, definiu-se um modelo econométrico incorporando variáveis do modelo gravitacional clássico, como a população e a distância. Além disso, foram acrescentadas algumas variáveis socioeconômicas como o PIB e uma *Dummy*, e uma impedância associada ao tipo de rodovia. A equação genérica é dada por:

$$T_{ij} = \alpha_0 P_i^{\alpha_1} P_j^{\alpha_2} PIB_i^{\alpha_3} dummy_j^{\alpha_4} d_{ij}^{\alpha_5} Tipo_{ij}^{\alpha_6} \quad (7)$$

Onde:

$P_i$  e  $P_j$  são as populações dos municípios  $i$  e  $j$ , respectivamente;

$PIB_i$  é o produto interno bruto de  $i$ ;  
 $dummy_j$  indica se o município  $j$  é ou não um pólo turístico e/ou industrial;  
 $d_{ij}$  é a distância da viagem de  $i$  para  $j$ ;  
 $Tipoi_j$  é o tipo de rodovia (Federal – BR ou Estadual – SC) de  $i$  para  $j$  no link  $l_k$ ;  
 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  e  $\alpha_6$  são os coeficientes a serem determinados.

As equações fundamentais dadas em (1) serão construídas de acordo com o número de contadores que se tem informação do volume de tráfego. A partir das equações fundamentais realizou-se o procedimento de calibração.

#### 4 O SOFTWARE SATURN

O SATURN - *Simulation and Assignment of Traffic in Urban Road Networks* (Van Vliet e Hall, 1998; Van Vliet, 1982) é um modelo de alocação e simulação de tráfego, desenvolvido pela Universidade de *Leeds*, Inglaterra. Foi concebido no início da década de oitenta para avaliação de esquemas de gerenciamento de tráfego e vem sofrendo constantes aperfeiçoamentos teóricos e computacionais desde então (Hall *et al.* 1980).

O modelo SATURN foi implantado para uma parte da área interurbana, localizada na região Oeste do Estado de Santa Catarina, sul do Brasil. A matriz de viagens foi obtida através do modelo de maximização de entropia ME2, dada pela equação (6), que atualiza matrizes de viagens. Uma matriz é atualizada de modo a melhor reproduzir o padrão de contagens volumétricas observadas na rede. No presente estudo, a construção da matriz a priori se deu através da estimativa utilizando-se o modelo econométrico dado pela equação (7). O ME2 utiliza como insumos básicos, além das contagens, informações sobre as rotas usadas nos deslocamentos que são fornecidas pelo modelo de alocação.

Fez-se, uso do *software* SATURN (Van Vliet, 1982) para comparar os resultados obtidos com o modelo proposto e avaliar a utilização da matriz O-D obtida como uma matriz a priori, pois não se obtém na região em estudo uma matriz O-D. O procedimento foi dividido em duas etapas:

- i. Estimou-se uma matriz com o SATURN, usando-se uma matriz unitária como matriz a priori, e posteriormente;
- ii. Utilizou-se a matriz estimada pelo modelo proposto no trabalho, como a matriz a priori (matriz semente).

#### 5 ANÁLISE DO AJUSTE DO MODELO

De forma geral, o desempenho de um modelo de distribuição de viagens é avaliado medindo-se a proximidade entre a matriz O-D de fluxos estimados pelo modelo e a matriz O-D de fluxos observados na área de estudo. Entretanto, para a realização deste trabalho, não se dispunha de uma matriz O-D observada; por isso, só foi possível fazer uma avaliação do ajuste obtido. Os dados observados, para este caso, são os fluxos obtidos pelas contagens volumétricas.

Para medir a proximidade entre estas contagens observadas e as estimadas pelos modelos, são usadas algumas estatísticas, conhecidas na literatura como medidas de *goodness-of-fit*, dadas por Wilson (1976) apud Gonçalves (1992).

Dessa forma, antes de apresentar as estatísticas utilizadas para medir o ajuste, torna-se necessário introduzir algumas notações. São elas:

$Vl_k$  é o volume estimado, dado pela equação  $Vl_k = \sum_{ij} p_{ij}^k \cdot T_{ij}$  ;

$Vl_k^*$  é o volume de tráfego observado no *link*  $l_k$ ;

$Vl^*$  é o volume total observado;

$\bar{V}^* = \sum V^* / n$  é o volume médio observado e  $n$  o número de links com postos de contagem.

Foram usadas três estatísticas que são:

**Tabela 1 Estatísticas *goodness-of-fit***

Estatísticas	Equações
Phi – Normalizada	$PHI = \sum_k \frac{V_k^*}{V^*} \left  \ln \frac{V_k^*}{V_k} \right $
Índice de Dissimilaridade	$ID = \frac{50}{V^*} \sum_{ij}  V_k^* - V_k $
Erro Médio Absoluto Normalizado	$EMAN = \sum_k \left  \frac{V_k^* - V_k}{\bar{V}^*} \right $

É importante salientar que quanto menor for o valor obtido para cada uma das estatísticas, melhor será o ajuste entre os volumes observados e estimados.

## 6 CALIBRAÇÃO DO MODELO

A calibração constitui uma etapa intermediária muito importante para a validação do modelo. Busca-se determinar os parâmetros do modelo através de critérios de calibração (Tamin e Willumsen, 1989). A calibração deve assegurar que os parâmetros encontrados resultem em estimativas que melhor se ajustem aos dados observados. Neste trabalho foi utilizado um método usando-se uma penalidade. Este foi elaborado devido ao uso de algoritmo genético, utilizado para determinar os parâmetros do modelo.

Escolheu-se um algoritmo para a penalidade que fosse fácil de implementação computacional, para aumentar a velocidade de processamento. Ainda, ele deveria poder dar valores possíveis em todos os pontos que pertençam ao intervalo viável da variável de entrada, que é dada pela razão entre o volume observado e o estimado. Logo, esses valores podem variar entre  $(-\infty, +\infty)$ .

Além disso, erros acima de 30% foram modelados de forma a serem tratados como valores a serem desprezados. Por isso, aplicou-se uma função com limiar conhecida como *threshold*. O valor máximo da penalidade foi calibrado para 99 acima de um erro de 30%. Contudo, valores abaixo de 10% foram considerados como muito bons. Por isso foi dado um bonificação para eles na penalidade. Para o intervalo de erro entre 10 e 30%, foi aplicada uma penalidade que varia em função do erro quadrático, a fim de acentuar ou valorizar valores que cheguem próximos a meta estabelecida de 10% de erro.

Em outras palavras, a penalidade é dada pelo algoritmo abaixo:

Variável de entrada = razão = Volume Estimado / Volume Observado

Se razão  $\leq 0,7$  ou razão  $\geq 1,3 \rightarrow$  Penalidade = 99;

Se  $0,7 \leq \text{razão} \leq 1,3 \rightarrow \text{Penalidade} = (|\text{razão} - 1| * 9)^2$ ;

Se  $0,9 \leq \text{razão} \leq 1,1 \rightarrow \text{bônus de } -50$ .

Cabe ressaltar que, para calibrar os parâmetros foi necessária a criação de uma rotina computacional. Com isso, conseguiu-se fazer os experimentos necessários para a realização da análise do comportamento dos critérios de calibração nos modelos de distribuição de viagens estudados.

Esse programa foi desenvolvido na linguagem de programação da *Microsoft C#*, utilizando-se algoritmos genéticos. Para a realização do processo de calibração foi necessária a elaboração de um arquivo de entrada de dados, gerado de maneira que fosse viável a implementação de rotinas capazes de identificar o modelo a ser utilizado.

## 7 TESTE REALIZADO

A área de estudo em que foi feita a aplicação do modelo está situada no Estado de Santa Catarina, localizado na região Sul do Brasil. Na área testada, contou-se com 91 municípios com 50 *links* possuindo contagens volumétricas. A localização da área de estudo pode ser vista na Figura 1.



**Fig. 1 Localização da área de estudo no Brasil**

Primeiro, se estimou uma matriz O-D usando o modelo econométrico (ME). Posteriormente, estimou-se uma matriz no SATURN usando-se como matriz a priori, uma matriz unitária (SMU). Em seguida, estimou-se uma matriz também no SATURN usando, como matriz a priori, a matriz estimada pelo modelo econométrico proposto (SME). Para a estimação da matriz utilizou-se a alocação tudo ou nada.

Na Tabela 2 são apresentados os resultados obtidos nas medidas de ajuste entre o volume observado e estimado:

**Tabela 2 Valores obtidos nas estatísticas**

<b>Estatísticas</b>	<b>SMU</b>	<b>SME</b>	<b>ME</b>
<b>ID</b>	33,2032	14,3131	27,2977
<b>EMAN</b>	33,2000	14,3117	27,2950
<b>PHI</b>	2,9717	0,4452	0,8897

Ao observar a Tabela 2, pode-se perceber que houve um ajuste significativo entre os três casos. Os resultados mostraram-se adequados para a região em estudo, quando se utilizou como matriz a priori, no SATURN, a matriz estimada. Pode-se dizer que quando não se dispõe de uma matriz a priori, a matriz estimada pelo modelo proposto mostra ser uma opção a se utilizar.

Cabe ressaltar que foi utilizado um microcomputador Intel Pentium Dual-Core Inside 2390, 1.87 GHz, 2,00 Gb. Para calibração do modelo econométrico usando-se o algoritmo genético foi consumido um tempo aproximado de 20 minutos. Já no SATURN o tempo de processamento, para a estimação de uma matriz usando-se como matriz a priori uma matriz unitária, foi de 0,44 segundos e 15 iterações. Na estimação de uma matriz, também no SATURN, usando como matriz a priori, a matriz estimada pelo modelo econométrico proposto, o tempo de processamento foi de 0,75 segundos e 24 iterações.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram apresentados os fundamentos teóricos e aspectos práticos relativos aos modelos econométricos para estimar uma matriz O-D a partir de contagens volumétricas, em uma rede interurbana. Podendo-se afirmar que o objetivo principal deste trabalho foi atingido, pois após estimar uma matriz O-D, conseguiu-se utilizá-la como uma matriz a priori na atualização de uma matriz com o modelo SATURN. Através do SATURN pode-se melhorar os erros causados na estimação feita pelo modelo econométrico proposto.

Para a realização do teste com o modelo econométrico foi implementado um programa que auxiliasse na estimação dos volumes. Para isso, utilizou-se algoritmo genético. Este exigiu que fosse elaborado um procedimento de calibração adequado. O procedimento de calibração se deu através de uma penalidade.

Com o uso do SATURN conseguiu-se concluir que, quando não se dispõe de uma matriz O-D a priori, modelos como o proposto podem ser considerados mais apropriados do que uma matriz unitária. Além disso, pode-se dizer que a matriz O-D estimada pelo modelo proposto pode ser usada como uma matriz a priori no SATURN, fornecendo, assim, melhores estimativas.

Por fim, acredita-se que uma aplicação prática em uma rede interurbana mais abrangente, contando-se com mais municípios e mais links com informações sobre o volume de tráfego, seria bastante importante para ilustrar a aplicabilidade do modelo econométrico proposto, bem como o uso do modelo SATURN na atualização de matrizes O-D.

## 9 REFERÊNCIAS

Abrahamsson, T. (1998) Estimation of Origin-Destination Matrices Using Traffic Counts – A Literature Survey. Interim Report (IR-98-021/May) **IIASA – International Institute for Applied Systems Analysis**. Laxenburg, Áustria.

Brenninger-Göthe, M., Jörnsten, K. O. e Lundgren, J. T. (1988) Estimation of origin-destination matrices from traffic counts using multiobjective programming formulations. **Transportation Research B**, 23 (4), 257 – 269.

- Gonçalves, M. B. (1992) **Desenvolvimento e teste de um novo modelo gravitacional - de oportunidades para distribuição de viagens**. Florianópolis: Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Hall, M. D., Van Vliet, D. e Willumsen L. G. (1980) SATURN – A simulation – assignment model for the evaluation of traffic management schemes. **Traffic Engineering & Control**, 21, 168 – 176.
- Lima, M. P. (2001) **Uma contribuição metodológica à modelagem da demanda de carga em corredores agrícolas de exportação**. Florianópolis: Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Loureiro, K. C. (2010) **Uso de Contagens Volumétricas na Estimativa de Matrizes de Origem-Destino de Veículos Leves em Redes Interurbanas**. Florianópolis: Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Ortúzar, J. D. e Willumsen, L. G. (2001) **Modelling Transport**. Wiley&Sons, New York.
- Robillard, P. (1975) Estimating the O – D matrix from observed link volumes. **Transportation Research**, 9, 123 – 128.
- Robillard, P. (1975) Estimating the O–D matrix from observed link volumes. **Transportation Research**, 9, 123 – 128.
- Tamin, O. Z. e Willumsen, L. G. (1989) Transport demand model estimation from traffic counts. **Transportation** 16, 3 – 26.
- Van Vliet, D. (1982) SATURN – A Modern Assignment Model. **Traffic Engineering and Control**, 23, 578 – 581.
- Van Vliet, D. e Hall, M. (1998). **Saturn version 9.4: user's manual**. Institute for Transport Studies. University of Leeds. England.
- Van Zuylen, H. e Willumssen L. G. (1980) The Most Likely Trip Matrix Estimated from Traffic Counts. **Transportation Research**, 14.
- Willumsen, L. G. (1981) Simplified transport models based on traffic counts. **Transportation** 10, 257 – 278.
- Willumsen, L. G. (1978) **Estimation of an O–D matrix traffic counts – A review**. Disponível em: <http://eprints.whiterose.ac.uk/2415/>. Acesso em 04/10/2007.
- Wilson, A. G. (1970) **Entropy in Urban and Regional Modelling**. Pion, London, England.